University of Ljubljana
Institute of Mathematics, Physics and Mechanics
Department of Mathematics
Jadranska 19, 1000 Ljubljana, Slovenia

Preprint series, Vol. 41 (2003), 856

GEOMETRIC PROPERTIES OF THE SURGERY SPECTRAL SEQUENCE

Yurij V. Muranov   Dušan Repovš

ISSN 1318-4865

January 15, 2003

Ljubljana, January 15, 2003

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СПЕКТРАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТЕОРИИ ПЕРЕСТРОЕК

Ю. В. Муранов, Д. Реповш

Пусть X – замкнутое топологическое многообразие размерности $n \geqslant 5$ с фундаментальной группой $G = \pi_1(X)$, имеющей подгруппу $\pi \subset G$ индекса 2. Рассмотрим отображение $\chi\colon X \to \mathbb{R}P^m$ многообразия X в m-мерное действительное проективное пространство высокой размерности. Пусть χ индуцирует эпиморфизм фундаментальных групп $\chi_*\colon G \to \mathbb{Z}/2$ с ядром π. Обозначим через Y одностороннее подмногоообразие X, которое является трансверсальным прообразом $\chi^{-1}(\mathbb{R}P^{m-1})$ одностороннего подмногообразия $\mathbb{R}P^{m-1} \subset \mathbb{R}P^m$. Пара (X, Y) является парой Браудера–Ливси, если вложение $Y \to X$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп (см. [1], [2]).

Для пары Браудера–Ливси имеет место коммутативная диаграмма точных последовательностей (см. [3], [4]):

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\to & & L_{n+1}(\pi) & & \longrightarrow & & L_{n+1}(G^+) & & \to & & LN_{n-1}(\pi\to G) & & \to \\
& \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
& & & & LP_n(F) & & & & L_{n+1}(\pi\to G) & & & & \\
& \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
\to & & LN_n(\pi\to G) & & \longrightarrow & & L_n(G^-) & & \longrightarrow & & L_n(\pi) & & \to
\end{array} \quad . \tag{1}$$

В диаграмму (1) входят группы препятствий к перестройкам $L_*(\pi)$ и $L_*(G)$, группы $LN_*(\pi \to G)$ препятствий к расщеплению вдоль одностороннего подмногообразия $Y \subset X$ и группы $LP_*(F)$ препятствий к перестройкам по паре многообразий (X, Y) (см. [5], [6]).

В работе [7] построена спектральная последовательность в теории перестроек. Для построения используется реализация коммутативной диаграммы (1) на уровне спектров. Основная фильтрация спектров из работы [7]

$$\cdots \to X_{3,0} \to X_{2,0} \to X_{1,0} \to X_{0,0} \to X_{-1,0} \to \cdots \tag{2}$$

содержит $\mathbb{L}$-спектр $X_{0,0} = \mathbb{L}(G^+)$ и спектр $X_{1,0} = \Sigma\mathbb{L}P(F)$ (см. [8], [9]).

Множество $\mathscr{S}_n(X, Y, \xi)$ s-триангуляций пары многообразий (X, Y) входит в точную последовательность

$$\cdots \to \mathscr{S}_n(X, Y, \xi) \to [X, G/TOP] \xrightarrow{v_\xi} LP_{n-1}(F) \to \cdots, \tag{3}$$

которая может быть построена на уровне спектров [5].

Пусть $\mathbf{L}_\bullet$ обозначает односвязное накрытие Ω-спектра $\mathbf{L}_\bullet(\mathbb{Z})$ [5], [6]. При этом для замкнутого топологического многообразия X имеет место изоморфизм $[X, G/TOP] \cong H_n(X, \mathbf{L}_\bullet)$. Существует также Ω-спектр $\mathbb{S}(X)$, n-мерные гомотопические группы которого задают множество топологических триангуляций $\mathscr{S}_n(X)$ многообразия X.

Пусть $(Z \subset Y \subset X)$ – тройка многообразий, так что каждая из пар многообразий $(Z \subset Y)$, $(Y \subset X)$ является парой Браудера–Ливси. Будем предполагать, что размерность подмногообразия Z не менее 5.

Будем говорить, что нормальное отображение f *перестраивается до простой гомотопической эквивалентности троек многообразий*, если класс нормального кобордизма отображения f содержит отображение g со следующими свойствами:

1) отображение $g|_X$ является простой гомотопической эквивалентностью;
2) отображение g трансверсально подмногообразиям Y и Z;
3) ограничения g на трансверсальные прообразы Y, $X \setminus Y$, Z, $Y \setminus Z$ являются простыми гомотопическими эквивалентностями.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00009).

Работа второго автора выполнена при поддержке Министерства науки и техники Республики Словения (грант № J1-0885-0101-98).

Обозначим через α композицию отображений (см. [5])

$$\mathscr{S}_n(X,Y,\xi) \to \mathscr{S}_{n-1}(Y) \to LN_{n-2}(\pi \to G^-).$$

Теперь композиция отображения α с отображением $LP_n(F) \to \mathscr{S}_n(X,Y,\xi)$ из точной последовательности (3) дает отображение $\beta\colon LP_n(F) \to LN_{n-2}(\pi \to G^-)$.

Лемма 1. *Существует отображение спектров $b\colon \Omega^2\mathbb{L}P(F) \to \mathbb{L}N(\pi \to G^-)$, для которого индуцированное отображение гомотопических групп b_* совпадает с отображением β.*

Обозначим через $\mathbb{L}T(X,Y,Z)$ Ω-спектр, являющийся гомотопическим кослоем отображения b, а через $LT_n(X,Y,Z)$ гомотопические группы $\pi_n(\mathbb{L}T(X,Y,Z))$.

Теорема 1. *Имеет место отображение спектров $\psi\colon \Omega^2(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) \to \mathbb{L}T(X,Y,Z)$, индуцирующее гомоморфизм $\psi_*\colon H_n(X, L_\bullet) \to LT_{n-2}(X,Y,Z)$. Нормальное отображение $[f\colon M \to X] \in [X, G/TOP] \cong H_n(X, L_\bullet)$ тогда и только тогда перестраивается до простой гомотопической эквивалентности троек многообразий, когда $\psi_*(f) = 0$.*

Теорема 2. *Имеет место гомотопическая эквивалентность спектров*

$$\Sigma^2\mathbb{L}T(X,Y,Z) \cong X_{2,0},$$

где спектр $X_{2,0}$ входит в фильтрацию (2) *спектральной последовательности теории перестроек.*

Следствие. *Пусть F^- обозначает квадрат фундаментальных групп в задаче расщепления для пары Браудера–Ливеси $Z \subset Y$. Имеет место коммутативная диаграмма точных последовательностей*

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\to & & L_{n+1}(\pi) & & \longrightarrow & & LP_n(F) & & \longrightarrow & & LN_{n-2}(\pi \to G^-) & & \to \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & & & LT_{n-1}(F) & & & & L_n(G^-) & & & & \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
\to & & LN_{n-1}(\pi \to G^-) & & \longrightarrow & & LP_{n-1}(F^-) & & \longrightarrow & & L_n(\pi) & & \to
\end{array}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] W. Browder, G. R. Livesay // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. P. 242–245. [2] S. E. Cappell, J. L. Shaneson // Lecture Notes in Math. 1979. V. 763. P. 395–447. [3] А. Ф. Харшиладзе // Труды ММО. 1980. Т. 41. С. 3–36. [4] A. A. Ranicki // Canad. J. Math. 1987. V. 39. P. 345–364. [5] A. A. Ranicki Exact Sequences in the Algebraic Theory of Surgery. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1981. (Math. Notes. V. 26.) [6] C. T. C. Wall Surgery on Compact Manifolds. London: Academic Press, 1970; 2nd ed. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999. [7] И. Хэмблтон, А. Ф. Харшиладзе // Матем. сб. 1992. Т. 183. №9. С. 3–14. [8] Ю. В. Муранов, Д. Реповш // Матем. сб. 1997. Т. 188. №3. С. 127–142. [9] A. Cavicchioli, Yu. V. Muranov, D. Repovš // Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8). 2001. V. 4. P. 647–675.

Институт современных знаний,
Витебск, Беларусь;
Институт математики, физики и механики Люблянского университета,
Любляна, Словения
E-mail: ymuranov@mail.ru; dusan.repovs@fmf.uni-lj.si

Принято редколлегией
23.09.2002