

UNIVERSITY OF LJUBLJANA
INSTITUTE OF MATHEMATICS, PHYSICS AND MECHANICS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
JADRANSKA 19, 1000 LJUBLJANA, SLOVENIA

Preprint series, Vol. 41 (2003), 865

ON SOME ALGEBRAIC
PROPERTIES OF CERF
DIAGRAMS OF
ONE-PARAMETER FAMILIES OF
FUNCTIONS

P. M. Akhmetiev M. Cencelj
D. Repovš

ISSN 1318-4865

March 5, 2003

Ljubljana, March 5, 2003

О некоторых алгебраических свойствах диаграмм Серфа однопараметрических семейств функций

П.М.Ахметьев, Д.Реповш, М.Ценцель *

1 Введение

В.И.Арнольд в [A1] (см. также [A2], задача 1988-23, где приводится ссылка на более раннюю работу) сформулировал проблему перенести конструкцию Понтрягина-Тома [П],[Th] для изучения пространств функций.

Параллельно с работами В.И.Арнольда, конструкция Понтрягина-Тома была перенесена из категории кобордизмов многообразий в категорию кобордизмов отображений с особенностями. Идея такого обобщения появилась впервые в работе А.Сюча [Sz], а недавно эта идея была разработана и для отображений с более сложными особенностями в совместной работе [R-Sz] этого же автора с Р.Римани.

Решение проблемы В.И.Арнольда предполагает перенесение конструкции Понтрягина-Тома на пространство функций на многообразии высокой размерности. Такое исследование было предпринято первым автором в работе [Ахм1], где конструкция Понтрягина-Тома применяется в форме Уэлса [W]. Рассмотрение было проведено лишь для первых двух гомотопических групп (т.е. с числом параметров в задаче не большим 2), при этом высшие особенности на пространстве функций, за исключением морсовских особенностей и особенностей типа "рождения-гибели" пары морсовских особых точек, запрещены.

*Работа первого автора выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 02-01-00014 и 02-01-00578) и гранта INTAS N00-0259; работа второго и третьего автора выполнена при частичной поддержке Министерства Образования, Науки и Спорта Республики Словении, грант N 0101-509.

Как следствие этих построений, в работе [Ахм1] было доказано, что диаграммы Серфа двухпараметрических семейств функций с обобщенными морсовскими особенностями подчиняются некоторым алгебраическим соотношениям, которые формулируются в терминах простейшего композиционного соотношения в стабильных гомотопических группах сфер. В частности, было доказано, что некоторые явно построенные поверхности, моделирующие априори диаграмму Серфа двухпараметрического семейства, не могут быть, в действительности, реализованы как диаграммы Серфа.

Недавно авторам стало известно, что теорема запрета из [Ахм1], доказательство которой весьма сложно, может быть получена более простым способом как следствие теоремы Лауденбаха-Игусы [L][Ig1][Ig2], которая цитируется ниже, и h -принципа. Применительно к теории псевдоизотопий h -принцип развивался Элиашбергом и Мишачевым в серии работ [E-M1],[E-M2]. обстоятельный обзор основных результатов по h -принципу имеется в книге [E-M3]. Мы собираемся впоследствии передоказать (и обобщить) теорему из [Ахм1] в рамках указанного метода.

В настоящей работе мы рассматриваем одномерный аналог указанной теоремы, который более прост, но не был ранее доказан. В одномерном случае запретов на диаграмму Серфа не возникает, но возникает важное, на наш взгляд, понятие "ложного ринкла", или "перекрученного ринкла", если использовать понятие "ринкл" в смысле [E-M1]. Имеется ввиду компонента кривой критических точек, образ которой в пространстве "значений + параметров" представлен простейшей диаграммой Серфа (линзой) с разными коэффициентами инцидентности сепаратрисных дисков в точках типа "рождения-гибели", она изображена ниже на рис 1.b. на стр. 8. Такие ложные ринклы запрещены в диаграмме Серфа в нечетном количестве.

Более подробно, диаграмма Серфа однопараметрического семейства функций на многообразии $M \times I$ представляет собой кривую с острями, которая погружена в пространство значений+параметра. Здесь и далее мы предполагаем, что многообразие M ориентировано. Предположим также, что диаграмма Серфа представлена лишь морсовскими критическими значениями двух соседних индексов (это предположение не ограничивает общности, если $\dim(M) \geq 5$, поскольку в каждом классе кобордизма диаграмм критических значений такая найдется). В остриях кривой диаграммы происходит рождение или гибель пары морсовских критических точек соседних индексов и определена, тем самым, дополнительная структура, связанная с коэффициентом пересечения стабильного и нестабильного сепаратрисного дисков, рождающихся или

погибающих в окрестности этой точки. Эта дополнительная структура определена при помощи согласованного выбора ориентаций стабильных сепаратрисных дисков в морсовских особых точках семейства. Выбор семейства ориентаций определяет коэффициент ± 1 инцидентности сепаратрисных дисков в окрестности точек типа "рождения+гибели". Этот выбор не однозначен, а с точностью до одновременного изменения коэффициентов в произвольной паре точек этого типа, которая соединена между собой общим отрезком морсовских критических значений на диаграмме. Поэтому каждую диаграмму Серфа можно охарактеризовать как нескрученную или скрученную, в зависимости от четности (0 или 1 соответственно) числа остриев, имеющих одинаковые указанные коэффициенты. При этом заметим, что ринклы имеют нескрученные диаграммы.

Оказывается, что диаграмма Серфа оказывается скрученной, в точности, если она имеет нечетное число точек самопересечения. Например, диаграммы на рис. 1 с,d на стр. 8 скрученные, поскольку самопересекаются в одной точке. Это доказано в Теореме, которая является основным наблюдением в работе.

С другой стороны, мы приводим также и альтернативное доказательство Теоремы, используя методы K -теории. Наши построения просты, т.к. не используют высших этажей K -теории, а лишь функтор K_1 – определитель. Использование этого функтора доставляет нетривиальное алгебраическое соотношение, которому подчиняются диаграммы Серфа функционального семейства, представляющего элемент из $\pi_1(P(M), E(M))$. С нашей точки зрения, такой подход мотивирован проблемой визуализации высшего алгебраического K -функтора, алгебраические свойства которого к настоящему времени для целочисленных групповых колец фундаментальной группы изучены не в полной мере (см. [Ахм2] по поводу возможных топологических приложений).

Структура работы такова: в разделе 2 мы напоминаем (в минимальной общности) основные определения, которые, фактически, были объяснены выше. Далее в разделе 3 формулируется основная теорема, которая доказывается в разделе 4 с точки зрения K -теории, а в разделе 5, предшествующем обсуждениям, методом Мишачева-Элиашберга.

2 Основные пространства

Пусть M – замкнутое многообразие, $\dim(M) = m \geq 5$. Пространство псевдоизотопий $E(M \times I)$ было определено и изучено в работе Серфа [С] (мы сохраняем обозначение, принятое в этой работе) как пространство функций $f : M \times I_x \rightarrow I_y$, $f(M \times \{0\}) = 0, f(M \times \{1\}) = 1$, $I_x = I_y = [0; 1]$, причем f не имеет критических точек и совпадает в некоторой окрестности (размеры которой не фиксируются) со стандартной проекцией на второй сомножитель. Это пространство имеет гомотопический тип пространства автодиффеоморфизмов многообразия $M \times I_x$, тождественных на нижнем основании.

Формальным аналогом $hE(M \times I)$ пространства $E(M \times I)$ служит пространство ненулевых сечений касательного расслоения $T(M \times I_x)$, совпадающих в некоторой окрестности границы с сечением по направлению I_x . Предполагается, что на M задана риманова метрика, тогда определено отображение $h_E : E(M \times I) \rightarrow hE(M \times I)$, сопоставляющее функции f ее поле градиента. Предположим далее, что M односвязно. По теореме Серфа $E(M)$ связно. Отображение h_E (при любом M) является стягиваемым. Эта теорема цитируется в [Е-М1] как теорема Игусы-Лауденбаха.

Для изучения гомотопического типа пространства $E(M \times I)$ определяется пространство $P(M \times I)$ функций с обобщенными морсовскими особенностями, т.е. морсовскими особенностями и особенностями типа "рождения - гибели" пары морсовских особых точек. Это пространство и его формальный аналог $hP(M \times I)$ мы определяем в следующем разделе. В работе [Е-М1] доказано, что естественное включение $E(M \times I) \subset P(M \times I)$ является стягиваемым. Впрочем, первоначально близкий результат о стягиваемости этого отображения вплоть до некоторой размерности, был доказан Игусой в [Ig2]. В работе [Е-М2] доказано, что пространство $P(M \times I)$ слабо гомотопически эквивалентно своему формальному аналогу $hP(M \times I)$. Заметим, что эта теорема не вытекает из результата Васильева [В2]. Доказательство весьма сложно и использует специальную технику, разработанную в [Е-М1].

Кроме того, для технических целей, нам будет удобно ввести пространство $holP(M \times I)$, которое включено в диаграмму

$$P \stackrel{i_{hol}}{\subset} hol P \stackrel{i_h}{\subset} hP. \quad (1)$$

Точками пространства $holP$ служат формальные функции, голономные в малой окрестности своих критических точек.

Рассмотрим теперь многообразие N размерности $m + 1$, вообще говоря, с непустой границей. Обозначим через $F(N)$ пространство всех гладких вещественнозначных функций, определенных на данном многообразии и совпадающих в окрестности границы с заданной функцией $\varphi : N \rightarrow R^1$, которая на этой окрестности регулярна. В основном примере имеем $N = M \times I$, а в качестве φ выбирают стандартную проекцию на второй сомножитель. В этом случае удобно для краткости писать $F(M)$ вместо $F(M \times I)$. Аналогично будем писать далее $E(M)$ вместо $E(M \times I)$, $P(M)$ вместо $P(M \times I)$ и т.д.

Пусть $\mathfrak{R} \subset J^k(N)$ - открытое подпространство в многообразии струй, инвариантное относительно лево-правых замен координат, вдобавок дополнительное к полуалгебраическому множеству. Многообразие струй снабжено расслоением $\kappa : J^k(N) \rightarrow N$. Определим пространство функций с \mathfrak{R} -умеренными особенностями $A(N, \mathfrak{R}, \varphi)$, как подпространство в $F(N)$, состоящее из таких функций, струи которых лежат в \mathfrak{R} , причем в сколь угодно малой окрестности границы ∂N , каждая функция совпадает с заданной регулярной φ . Если \mathfrak{R} совпадает со всем пространством $J^k(M)$ и $N = M \times I_x$, то пространство $A(N, \mathfrak{R}, p)$ совпадает с вышерассмотренным $F(M)$.

Формальным аналогом пространства функций $A(N, \mathfrak{R}, \varphi)$ служит пространство $hA(N, \mathfrak{R}, \varphi)$ сечений расслоения κ , значения которых лежат в подпространстве \mathfrak{R} и которые имеют в сколь угодно малой окрестности границы k -струю данного регулярного отображения. В случае $N = S^m \times I_x$, можно определить формальный аналог hA , как подпространство в пространстве отображений $Map[S^m \times I_x; \mathfrak{R}]$ со значениями в \mathfrak{R} и заданными граничными условиями.

Определено отображение $A(N, \mathfrak{R}, \varphi) \rightarrow hA(N, \mathfrak{R}, \varphi)$, сопоставляющее гладкой функции значение ее k -струи.

Исходная задача вычисления гомотопического типа пространства A может быть изучена при помощи методов алгебраической топологии путем вычисления гомотопического типа пространства hA . Такая редукция называется h -принципом. Во многих задачах формальный аналог hA оказывается слабо гомотопически эквивалентным исходному пространству функций A , по этому поводу см. работы Васильева [B1],[B2]. Теорема Мишачева-Элиашберга также утверждает, что h -принцип выполняется для пространства функций только с особенностями A_1 и A_2 .

Определение пространства $P(M)$ обобщенных морсовских функций

Скажем, что функция $f : M \times I_x \rightarrow I_y$ является обобщенной функцией Морса, если $f \in F(M)$ и ее особенности задаются следующими формулами после соответствующего преобразования системы координат.

$$-x_1^2 - \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_{m+1}^2. \quad (A_1)$$

$$-x_1^2 - \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_m^2 + x_{m+1}^3. \quad (A_2)$$

Точки типа A_1 называются морсовскими особыми точками индекса i . Точки типа A_2 называются точками типа рождения-гибели пары морсовских критических точек индексов i и $i + 1$.

Определено пространство $P(M)$ функций с обобщенными морсовскими особенностями как подпространство в $F(M)$ функций с особенностями A_1, A_2 при подходящем выборе системы координат. Согласно предыдущим конструкциям определен формальный аналог $hA(M \times I, \mathfrak{R}, p)$, для краткости это пространство мы будем обозначать через $hP(M)$.

Определение пространства $hol P(M)$

В пространстве $hP(M)$ формальных функций определим подпространство $hol P(M)$, состоящее из формальных функций $hf : M \times I_x \rightarrow J^3$, удовлетворяющих следующим дополнительным условиям: существует открытое подмножество $U \subset M \times I_x$ такое, что $hf|_{M \times I \setminus U}$ не имеет критических точек, и $hf|_U$ совпадает со струйным расширением некоторой функции $f : M \times I_x \rightarrow I_y$ из $P(M)$. Иными словами, формальная функция $f : M \times I_x \rightarrow I_y$ должна быть голономной в окрестности своих критических точек.

Определение пространства $E(M)$ и его формального аналога $hE(M)$

Пространство $E(M)$ определено как подпространство функций $F(M)$, не имеющих критических точек. Формальный аналог этого пространства обозначим через $hE(M)$. Это – пространство ненулевых сечений

кокасательного расслоения $T^*(M \times I_x)$ с предписанными краевыми условиями. Если M – риманово, то пространство $hE(M)$ естественно отождествляется с ненулевыми сечениями касательного расслоения $T(M \times I_x)$ со стандартными условиями на границе. В случае, когда M – стабильно параллелизуемо, расслоение $T(M \times I_x)$ тривиально и пространство $hE(M)$ можно описать как пространство отображений $M \times I_x \rightarrow S^m$, которые переводят границу многообразия $M \times \{0\} \cup M \times \{1\}$ в отмеченную точку на S^m . Определено отображение забывания $h_E : E(M) \rightarrow hE(M)$. По теореме Игусы-Лауденбаха, это отображение стягиваемо. (Этот случай проявляется уже на компонентах связности при неодносвязном M , т.к. пространство $E(M)$ оказывается в этом случае несвязным.) Его компоненты связности описываются в [Н-В]. Несмотря на то, что пространства $E(M)$, $hE(M)$ оказались гомотопически различными, Мишачеву и Элиашбергу см. [М-Е1] удалось построить функциональное пространство, формальным аналогом которого служит пространство $hE(M)$. Это пространство функций, диаграммы Серфа для которого имеют простейший вид и называются ринклами. Ринкл для однопараметрического семейства функций изображен на рис. 1а. Это пространство формально в наших построениях не используется, но оно играет основную роль для обоснования h -принципа.

Построенные выше пространства включены в коммутативную диаграмму.

$$\begin{array}{ccc}
 P(M) & \supset & E(M) \\
 h_P \downarrow & & \downarrow h_E \\
 h(P(M)) & \supset \text{hol}P(M) \supset & hE(M)
 \end{array} \quad (2)$$

3 Формулировка основного результата

Обратимся к геометрическим разъяснениям. Представитель элемента группы $\pi_1(P)$ или, что эквивалентно, группы $\pi_0(\Omega P)$, может быть изучен при помощи диаграммы Серфа – графика критических значений в расширенном пространстве значений + параметров, см. [С,Е-М1]. Рассмотрим следующие примеры $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ диаграмм Серфа, изображенных на рис.1 (а,b,c,d).

Легко построить пример семейства функций $\alpha = f(t), \gamma = g(t); t \in [0; 1]$, снабженных семейством ориентаций $O(t)$, представляющих семейство α (ринкл) и семейство γ (см., например, [С]). Каждое из семейств имеет лишь критические точки двух соседних индексов, $i + 1, i$.

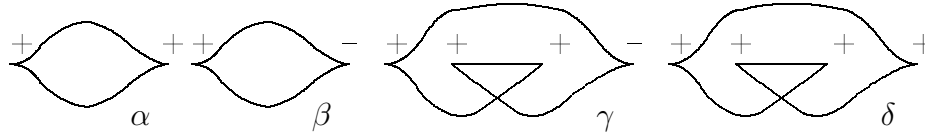


Рис. 1: a,b,c,d

Зафиксируем некоторое семейство ориентаций $O(t)$ на множестве стабильных сепаратрисных дисков критических морсовских точек семейств α , β . При этом предполагается, что ориентация меняется непрерывно относительно параметра семейства. В точках типа "рождения-гибели" ориентация не фиксируется.

Рассмотрим семейства $O(t)$ в окрестности точек типа "рождения-гибели". Каждая критическая точка x этого типа (скажем, особенности типа рождения-гибели на диаграмме 1a) снабжена знаком $o(x) = \pm 1$, в соответствии со знаком коэффициента инцидентности пары морсовских критически точек рождающихся или погибающих в этой особой точке. Очевидно, для семейства α выполнено соотношение

$$o(a)o(b) = +1, \quad (3.a)$$

в то время как для семейства γ выполнено соотношение

$$o(a_1)o(a_2)o(b_1)o(b_2) = -1. \quad (3.c)$$

Диаграммы b) (ложный ринкл), d) также можно рассматривать с формальной точки зрения. Для диаграммы b) имеем

$$o(a)o(b) = -1, \quad (3.b)$$

для диаграммы d) имеем

$$o(a_1)o(a_2)o(b_1)o(b_2) = +1. \quad (3.d)$$

Диаграммы Серфа можно определить и для формальных семейств $hol\alpha$, $hol\beta$, которые моделируют соответствующие семейства в группе $\pi_1(holP)$. Если зафиксировать семейства ориентаций $hO(t)$ на стабильных сепаратрисах критических значений формальных семейств, то для каждой критической точки hx типа "рождения-гибели" также определен знак $o(hx) = \pm 1$. Поскольку семейства функций пространства $holP$ голономны в окрестности своих критических точек, то диаграммы Серфа для этих семейств аналогичны.

Рассмотрим элемент α гомотопической группы $\pi_1(P, E)$, и диаграмму Серфа, представляющую этот элемент. Выберем дополнительную структуру $O(t)$ ориентаций сепаратрисных многообразий. Без учета дополнительной структуры O , диаграмма Серфа представлена погруженной кривой S критических значений в $(j + 1)$ -мерное пространство "значений-параметров". Строго говоря, кривая S не является погруженным подмногообразием, поскольку имеет особенности вдоль подмногообразия Σ критических значений типа "рождения-гибели" коразмерности 1. После сглаживания этой кривой S вдоль особого подмногообразия Σ , получим погруженное подмногообразие, которое мы будем обозначать снова через S . Согласно конструкции Понтрягина-Тома в форме Уэллса [П],[Th],[W] многообразию S представляет элемент $\kappa(\alpha)$ в стабильной гомотопической группе сфер $\pi_{n+1}(S^n)$, $n > 2$, которая обозначается через Π_1 . Класс кобордизма этого элемента полностью определяется четностью числа точек самопересечения погруженной кривой S в квадрате "значений-параметров" $I_y \times I_t$.

На нульмерном многообразии Σ критических значений типа "рождения-гибели" дополнительная структура позволяет определить каноническое разбиение этого множества точек на два подмножества $\Sigma = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$, в соответствии со значением коэффициента инцидентности пары морсовских особенностей в малой окрестности компоненты критических точек. Класс кобордизма погруженного многообразия Σ_+ (многообразия Σ_+ и Σ_- кобордантны, как погруженные многообразия) определяет элемент $\rho(\alpha)$ в стабильной гомотопической группе сфер $\Pi_0 = \pi_n(S^n)$, $n \geq 1$. Этот элемент, вообще говоря, зависит от выбора структуры O на многообразии сепаратрисных дисков. Произвол в выборе структуры O не влияет на элемент $\rho(\alpha)$, если рассматривать этот элемент в факторгруппе $\Pi_0/2\Pi_0$. Действительно, каждый отрезок, состоящий из морсовских особенностей на диаграмме S ограничен парой особенностей Σ . Смена ориентации на многообразии стабильных сепаратрисных дисков вдоль этого отрезка изменяет типы особенностей Σ на его концах. Следовательно элемент $\rho(\alpha)$ (modulo 4) не зависит от выбора структуры O . С другой стороны, при кобордизме точки особенностей Σ уничтожаются парами, следовательно, элемент в факторгруппе $\Pi_0/2\Pi_0$ определяет инвариант на классе кобордизма диаграммы Серфа.

Обозначим через t образующую в Π_1 , которая представлена гомотопическим классом надстройки над отображением Хопфа $S^3 \rightarrow S^2$, в терминах конструкции Понтрягина-Тома эта образующая представляется классом кобордизма плоской кривой формы " ∞ ".

Теорема

Справедливо равенство

$$t \circ \rho(\alpha) = \kappa(\alpha), \quad (4)$$

где левая часть равенства обозначает композицию стабильных сфероидов.

Пример

Для пути α в пространстве функций, с диаграммой Серфа, изображенной на рис. с),d) выполнены равенства $\kappa = t$. Для семейств на рисунке b),c) имеем κ – элемент нечетного порядка в группе Π_1 .

4 Доказательство Теоремы при помощи функтора K_1 .

Пользуясь параметрической версией леммы Смейла (см. [H-W]), в гомотопическом классе $\alpha \in \pi_1(P(M), E(M))$ найдется такой путь $f(t)$, $t \in [0; 1]$, что выполнены следующие условия.

1. Семейство функций $f(t)$ имеет лишь критические точки индексов $i + 1, i$.
2. Критические значения индекса $i + 1$ (i) лежат в интервале $]\frac{1}{2}; 1[$ ($]0; \frac{1}{2}[$).

Заметим, впрочем, что прямая ссылка на результат из [H-W] неуместна, поскольку гомотопия, упрощающая диаграмму Серфа в соответствии с 1,2 может, вообще говоря, иметь высшие особенности типа "ласточкин хвост". С другой стороны, этих высших особенностей можно избежать, т.к. они попарно уничтожаются при соответствующей выборе гомотопии семейств. Процедура уничтожения ласточкиных хвостов также описана в [H-W] в отдельной главе.

Докажем формулу (4) при $\alpha = [f(t)]$. Для произвольного значения $t \in [0; 1]$, за исключением конечного множества особых значений, определена целочисленная матрица коэффициентов инцидентности $A(t)$ (здесь выбрана структура $O(t)$) критических точек в комплексе Морса многообразия $M \times I$, порожденного функцией $f(t)$). Критические точки индекса $i+1$ (i) нумеруются с 1 и их порядок определяется в соответствии с убыванием (возрастанием) критических значений. Условимся, что матрица $A(t)$ стабилизирована элементом $+1$ в клетке $0,0$, это

потребуется для избежания путаницы в случае, когда критических точек нет. Рассмотрим особые значения параметра t . Эти значения классифицируются следующим списком особенностей.

- а. Особенности типа "рождения-гибели" пары критических морсовских точек соседних индексов. Заметим, что дополнительным преобразованием градиентно-подобной стабильной сепаратрисной траектории для точки индекса $i+1$ и градиентно-подобной нестабильной сепаратрисной траектории для точки индекса i в окрестности точки типа "рождения" или "гибели", можно добиться того, чтобы множество особых сепаратрисных траекторий, лежащих на этих дисках, содержало всего единственную траекторию, которая соединяла бы эти две критические точки с коэффициентом ± 1 (при определении этого коэффициента предполагается, что структура на диаграмме Серфа выбрана структура O). Тогда знак этой траектории, т.е. коэффициент инцидентности рассматриваемой пары особых точек, позволяет определить две разновидности особенности, которые будут обозначаться через Σ_+ , Σ_- .

- б. Особенности типа прибавления-вычитания ручки в клеточном разбиении, порожденном функцией Морса.

- с. Особенность типа совпадения двух критических значений (в соответствии с правилом 2 – значений одного индекса).

Теперь рассмотрим те особенности, которые соответствуют точкам разрыва функции $\det(A(t))$, принимающей значения ± 1 . Разрыв этой функции обусловлен двумя причинами: совпадение пары критических значений (что приводит к умножению матрицы A слева или справа на матрицу элементарной транспозиции в зависимости от индексов

совпадающих критических значений) или точки типа "рождения-гибели" отрицательного типа Σ_- , что приводит к отщеплению одномерной скалярной матрицы от правого нижнего диагонального элемента. Число точек разрыва функции $\det(A(t))$ четно, т.к. при $t = 0$, $t = 1$ функция $f(t)$ не имеет критических точек и $A(t)$ принимает значения $+1$. Следовательно, четность числа x точек самопересечения на диаграмме Серфа совпадает с четностью числа y особенностей на диаграмме типа Σ_- . Теперь заметим, что значение гомоморфизма κ , построенного по этой диаграмме определяет образующую в Π_1 тогда и только тогда, когда $x = 1(mod 2)$. Далее значение $y(mod 2)$ определяет элемент в группе $\Pi_0/2\Pi_0$. Итак, $x = y(mod 2)$ или, эквивалентно, $\kappa = t \circ \rho$. Теорема доказана.

5 Доказательство Теоремы при помощи h -принципа

В рамках этого доказательства мы предположим, что многообразие M является не только односвязным, но и стабильно-параллелизованным. Рассмотрим последовательность

$$\pi_1(P(M), E(M)) \xrightarrow{(h_P, h_E)\sharp} \pi_1(holP(M), E(M)) \xrightarrow{hol\kappa \oplus hol\rho} \Pi_1 \oplus \Pi_1. \quad (5)$$

Гомоморфизм $hol\kappa \oplus hol\rho$ мы определяем на группе $\pi_1(holP(M), E(M))$ по аналогии с гомоморфизмом $\kappa \oplus \rho$, так, чтобы выполнялось равенство $(hol\kappa \oplus hol\rho) \circ h_P = \kappa \oplus \rho$.

Вычислим образ гомоморфизма $\kappa \oplus \rho$ в группе $\Pi_1 \oplus \Pi_0/2\Pi_0$. Пусть $\alpha = [f_t] \in \pi_1(holP, E)$ $t \in [0; 1]$ – исследуемое семейство формальных функций, голономное в малой регулярной окрестности своих критических точек, а также на границе пространства значений-параметров. В частности, функции f_0, f_1 являются голономными и не имеют критических точек.

Перестроим диаграмму Серфа семейства f_t до простейшей одной из простейших диаграмм, изображенных на рис.1. Заметим при этом, что все априори возможные классы кобордизма диаграмм представлены на этом рисунке. Более того, кобордизм диаграммы можно, не ограничивая общности, продолжить до гомотопии голономного семейства функций в регулярной окрестности диаграммы. Далее заметим, что семейство формальных функций также можно продеформировать, с сохранением условий в окрестности диаграммы. Действительно, кобордизм диаграммы, при которой все точки типа рождения-гибели сохраняются, можно продолжить до гомотопии формального семейства пользуясь стандартными соображениями. Далее элементарная перестройка диаграммы, а именно возникновение или появление пары особенностей типа "рождения" или "гибели" происходит внутри малого шара, где формальное семейство можно считать голономным по гомотопическим соображениям. Докажем это.

Обозначим параметр гомотопии через τ . Пусть в момент $\tau = \tau_0 - \varepsilon$ внутри диска $D_0 = D^{m+2} \subset M \times I_x \times I_t \times \{\tau_0 - \varepsilon\}$ расположены две дуги S_1, S_2 – диаграммы Серфа семейства $f_t(\tau_0 - \varepsilon)$, содержащие пару антиподальных особенностей Σ . Пространство $D_0 \setminus \Sigma$ имеет гомотопический тип букета $S^m \vee S^m$. Формальное семейство функций определяется с точностью до гомотопии отображением $F : S^m \vee S^m \rightarrow S^m$. На каждом слагаемом букета F имеет степень ± 1 (в зависимости от значения i) и вполне определяется ограничением семейства на пару

маленьких S^m -сфер, каждая из которых зацеплена с дугой диаграммы. (Ограничение формального семейства на каждую из сфер по условию голономно.) Следовательно, формальное семейство $f_t(\tau_0 - \varepsilon)$ гомотопно голономному семейству и перестройка диаграммы Серфа внутри D_0 продолжается до гомотопии формальных семейств.

Тем самым, достаточно показать, что диаграммы β , γ , представленные на рис. 1b, 1d, не могут быть реализованы ни для какого формального семейства f_t . Поскольку отображение $h_E : E \rightarrow hE$ стягиваемо, функции f_0, f_1 , как формальные, можно считать стандартными. Изучим возможность реализации диаграммы Серфа в виде ложного ринкла 1b. Сначала опишем семейство функций в окрестности ложного ринкла в аналитической форме.

Пусть $[f_t] \in \pi_1(P(), E(M))$ семейство функций, для которого диаграмма Серфа представляет стандартный ринкл, рис 1a. Пусть $I_0 \subset I_t$ вложенный отрезок в пространство параметров деформаций ростков и $a \in M^m \times I(x)$ - точка на многообразии. Выберем деформацию f_t , кроме того, удовлетворяющей некоторому техническому условию: в некоторой фиксированной шаровой окрестности точки a радиуса r , $U_r(a) \subset M^m \times I(x)$, функция $f(t)$ не зависит от $t \in I_0$ и задана стандартной квадратичной формой индекса $i + 1$. Для простоты дальнейших обозначений примем $r = 2$ и $I_0 = [1/3; 2/3]$.

Переопределим значение семейства ростков f_t внутри шаров $U_1(a) = U_1$ при указанных значениях параметра t , при этом вне шара семейство $f(t)$ менять не будем. После переопределения получится семейство $g(t)$, определенное внутри $U_1 \times [1/3; 2/3]$, причем его ограничение на $U_1 \times \{1/3 \cup 2/3\}$ совпадает с семейством $f(t)$.

Проведем вспомогательные построения. Обозначим через Δ 2-мерную плоскость, проходящую через точку a - центр шара U_2 и определенную координатами x_1, x_{i+2} . Заметим, что ограничение квадратичной функции f на плоскость Δ не является знакоопределенным. Рассмотрим однопараметрическое семейство вращений $Z_t : U_1 \rightarrow U_1$ в плоскости Δ в положительном направлении, параметризованных $t \in I_0$ такое, что $Z_{1/3}$ - тождественное преобразование, $Z_{2/3}$ - поворот на угол π . Определим $g(b, t)$, $b \in U_1$ по формуле $g(b, t) = f(Z(t)(b))$. Пары ростков $(g_{2/3}(x), f_{2/3}(x))$

$(g_{1/3}(x), f_{1/3}(x))$ совпадают для любой точки $x \in U_1$. Поэтому определено семейство функций $g(t)$ в окрестности ложного ринкла.

Обозначим через $V_1 \subset V_2 \subset M \times I_x \times I_t$ окрестность построенной диаграммы в пространстве прообразов+параметра, продолжающие окрестности $U_1 \subset U_2$ дуги диаграммы над отрезком $a \times I_0$ до окрестностей всей диаграммы. Вычислим препятствие к решению задачи продолжения

семейства $g(t)$ внутрь цилиндрического кольца $V_2 \setminus V_1$, совпадающим с f на внешней границе ∂V_2 , и с g на внутренней границе кольца ∂U_1 .

Семейство g на $\partial V_1 \times I_0$ задано ненулевым сечением расслоения $T(M \times I_x)$. В предположении об односвязности M , такое сечение определяется отображением $G : \partial U_1 \times I_0 \rightarrow S^m$, поскольку можно считать, что вся диаграмма S заключена в шар $D_0 \subset M \times I_x \times I_t$. Аналогично, семейство f на ∂V_2 определяется отображением $F : \partial V_2 \rightarrow S^m$.

Легко видеть, что отображения F и G гомотопны на образующих S^m сферических окрестностей $\partial V_1, \partial V_2$. Более того, F получается из G в результате композиции с семейством вращений сферы S^m вокруг окружности $S^1 \subset S^m$ на углы от 0 до 2π , параметризованные значением координаты на отрезке I_0 . Задача продолжения отображения внутрь цилиндрического кольца имеет препятствие $o(F, G)$ в группе когомологий $H^{m+1}(\partial U_1; \pi_{m+1}(S^m))$. Значение препятствия $o(F, G)$ определяется значением образующей $a \in \pi_1(SO)$ при гомоморфизме Джеймса-Уайтхеда $J : \pi_1(SO(m)) \rightarrow \pi_{m+1}(S^m) = \Pi_1$. Известно, что $J(a) = t$, $t \in \Pi_1$ — образующая. Следовательно, рассматриваемая задача продолжения не решается.

Теперь докажем, что задача продолжения отображения G с ∂U_1 до формальной функции hg на всем пространстве $M \times I_x \times I_t$ со стандартными условиями на границе пространства прообраза+параметра также не решается. Для этого изучим произвол в продолжении семейства формальных функций hg_t с $\partial(M \times I_x \times I_t)$ до семейства формальных функций на ∂V_2 . Диаграмма S заключена в шар ∂D_0 и ограничение hg на ∂D_0 однозначно, с точностью до гомотопии, задано постоянным отображением. Действительно, hg определяется отображением $S^{m+1} \rightarrow S^m$, а класс гомотопии является инвариантом бордизма отображения в классе стабильно-параллелизованных многообразий. Действительно, многообразие $M^m \times I_x \times I_t \setminus D_0$ является стабильно-параллелизованным многообразием, осуществляющее кобордизм между D_0 и внешней границей $M^m \times \partial(I_x \times I_y)$. Формальная функция hg на этом многообразии не имеет критических точек и представлена отображением $M^m \times I_x \times I_t \setminus D_0 \rightarrow S^m$. Поскольку отображение на внешней части границы имеет прообраз точки, оснащенный при помощи тривиального элемента из $\pi_1(SO)$ (отображение на границе определяется выбором стабильной тривиализации на M и не зависит от выбора координаты на границе расширенного пространства значений+параметров) то и $hg : \partial D_0 \rightarrow S^m$ гомотопно постоянному отображению.

С другой стороны, $G : \partial V_2 \rightarrow S^m$ однозначно продолжается до отображения $G : D_0 \setminus_2 \rightarrow S^m$ и это продолжение, как мы доказали выше,

отличается от постоянного отображения $F : \partial D_0 \rightarrow S^m$ на образующую из $\pi_{m+1}(S^m)$. Итак, доказано, что ложный ринкл не реализуется диаграммой Серфа ни для какого формального семейства функций. Случай диаграммы d) разбирается аналогично. Образ гомоморфизма $h\kappa \oplus h\rho$ вычислен и Теорема доказана.

6 Обсуждения

Мы изучили однопараметрические семейства функций с обобщенными морсовскими особенностями и показали что инварианты κ и ρ , построенные по диаграммам Серфа соответствующих семейств и принимающие значение в стабильных гомотопических группах сфер являются зависимыми для семейств формальных функций. С алгебраической точки зрения рассматриваемое соотношение связано с функтором $K_1(Z)$, т.е. определителем, а с гомотопической точки зрения соотношение между значениями κ и ρ детектируется образующей группы Π_1 .

При рассмотрении двухпараметрических семейств функций аналогичное алгебраическое соотношение уже связано с функтором $K_2(Z)$. В работе первого автора [Ахм1] высказана гипотеза, о том, что некоторые диаграммы Серфа семейств функций, имеющие допустимое локальное строение (и выступающие как диаграммы Серфа семейств формальных функций) запрещены для семейств голономных функций. При формулировке гипотезы предполагалось, что семейство функций без критических значений на границе пространства параметров является формальным. Сформулированную гипотезу предпочтительно переформулировать, в связи с последними результатами из [Е-М2]. Целесообразно было бы рассмотреть следующую проблему:

Проблема

Доказать результат о нереализуемости диаграмм Серфа двухпараметрических семейств функций из [Ахм1] в рамках h -принципа Мишачева-Элиашберга. Неформально говоря, показать, что h -принцип в теории псевдоизотопий "помнит" K -теорию на уровне пространств формальных функций с умеренными особенностями.

Авторы благодарят рецензента за внимательное прочтение рукописи и указание на ошибку в первоначальном варианте статьи.

Список литературы

- [A1] В. И. Арнольд, *Пространства функций с умеренными особенностями*, Функц. Анализ и прил. т.23, вып.3 (1989) 1-10.
- [A2] В.И.Арнольд, *Задачи Арнольда*, Фазис, Москва, 2000.
- [Ахм1] П.М. Ахметьев, *Вложения компактов, стабильные гомотопические группы сфер и теория особенностей*, Успехи мат. наук (2000), N3, 3-62.
- [Ахм2] П.М. Ахметьев, *K_2 для простейших целочисленных групповых колец и возможные топологические приложения*, Мат. Сборник, (2003), N1, 3-10.
- [C] J. Cerf, *La stratification naturelle des espaces des fonctions differentiables reelles et le theoreme de la pseudoisotopie*, Publ. Math. IHES, 39 (1970), 5-173.
- [E-M1] Y. Eliashberg, N.M.Mishachev, *Wrinkling of smooth mappings and its applications I*, Invent. Math. 130 (1997) 345-369
- [E-M2] Y. Eliashberg, N.M.Mishachev, *Wrinkling of smooth mappings – II. Wrinkling of embeddings and K.Igusa’s theorem*, Topology, Vol 39, N4 (2000) 711-732.
- [E-M3] Y. Eliashberg, N.M.Mishachev, *Introduction to the h-principle*, Graduate Studies in Mathematics, vol 48, AMS, Providence.
- [H-W] A.Hatcher and J.Wagoner, *Pseudo-isotopy of compact manifolds*, Asterisque, N6 (1973).
- [Ig1] K. Igusa, *On the homotopy type of the space of generalized Morse functions*, Topology 23, N2 (1984), 245-256.
- [Ig2] K. Igusa, *Higher singularities are unnecessary*, Annals of Mathematics 119, N1 (1984), 1-58.
- [L] F. Laudenbach, *Formes differentielles de degre 1 fermees non singulieres: classes d’homotopie de leurs noyaux*, Comment. Math. Helvet., 51, N3 (1976), 447-464.
- [B1] В.А. Васильев, *Топология дополнений к дискриминантам*, Фазис, Москва (1997).

- [B2] В.А. Васильев, *Топология пространств функций без сложных особенностей*, Функц. Анализ и Прил. т.23, вып. 4 (1989) 24-36.
- [П] Л.С.Понтрягин, *Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий*, 2 изд., Наука, Москва, (1976).
- [R-Sz] R.Rimanyi, A.Szucs, *Pontrjagin-Thom type construction for maps with singularities*, Topology 37 (1998) N6 1177-1191.
- [Sz] A.Szucs, *Analogue of the Thom space for mappings with singularity of type Σ^1* . Math. Sb. 108 (150) 1979 N3 438-456. English transl.: Math USSR-Sb 36 (1979) N 3 405-426 (1980).
- [Th] Thom R. *Quelques proprietes globales des varietes differentiables*. Comm. Math. Helv., (1954) 28 p.17-86. Русский перевод: Р.Том, *Некоторые свойства в целом дифференцируемых многообразий*. В книге "Расслоенные пространства", Москва, ИЛ (1958) 291-351.
- [W] R.Wells, *Cobordism groups of immersions* Topology 5 (1966), 281-294.

ИЗМИРАН, 142190 Россия, Троицк Московской обл.
 pmakmet@mi.ras.ru

Institut for Mathematics, Physics and Mechanics, University of Ljubljana,
 P.O.Box 2964, Ljubljana, Slovenia 1001
 dusan.repovs@uni-lj.si, matija.cencelj@uni-lj.si