University of Ljubljana
Institute of Mathematics, Physics and Mechanics
Department of Mathematics
Jadranska 19, 1111 Ljubljana, Slovenia

Preprint series, Vol. 42 (2004), 926

HAWAIIAN GROUPS OF TOPOLOGICAL SPACES

U. H. Karimov D. Repovš

ISSN 1318-4865

June 17, 2004

Ljubljana, June 17, 2004

ГАВАЙСКИЕ ГРУППЫ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

У. Х. Каримов, Д. Реповш

Подпространство $\mathcal{H}^n = \{\bar{x} = (x_0, x_1, \dots x_n) \in R^{n+1} |\ (x_0 - 1/k)^2 + \Sigma_{i=1}^n x_i^2 = (1/k)^2,\ \ k \in \mathbb{N}\}$ $(n+1)-$мерного евклидова пространства R^{n+1} называется *$n-$мерной Гавайской серьгой*, $n = 0, 1, 2, \dots$ Другими словами, $\mathcal{H}^n$ есть компактный букет счетного числа $n-$мерных сфер S^n. Точку $\theta = (0, 0, \dots)$ будем считать отмеченной точкой $\mathcal{H}^n$. Множество гомотопических классов $[f]$ отображений $f : (\mathcal{H}^n, \theta) \to (X, x_0)$ в пространство X с отмеченной точкой x_0 называется *$n-$мерным Гавайским множеством.* Обозначим его символом $\mathcal{H}_n(X, x_0)$. При $n \geq 1$ в $\mathcal{H}_n(X, x_0)$ естественно определяется групповая операция порожденная групповой операцией в $\pi_n(S^n, \theta)$. Группы $\mathcal{H}_n(X, x_0)$ (множества $\mathcal{H}_0(X, x_0)$) являются гомотопическими инвариантами в категории всех топологических пространств с отмеченными точками.

Слабым прямым произведением $\Pi_{i=1}^{\infty} G_i$ групп с единичными элементами e_i (множеств с отмеченными точками e_i) называется группа (множество) всех функции $g : \mathbb{N} \to \cup_{i=0}^{\infty} G_i$ таких, что $g(i) \in G_i$ и $g(i) = e_i$ для почти всех i.

Теорема 1. *Если пространство X локально $n-$связно и имеет счетную базу в точке x_0, тогда группа $\mathcal{H}_n(X, x_0)$ (соответсвенно, множество) $\mathcal{H}_0(X, x_0)$) естественно изоморфна (соответственно, равномощно) слабому прямому произведению $\Pi_{i=1}^{\infty} G_i$ в котором все $G_i = \pi_n(X, x_0)$.*

Доказательство. Рассмотрим любое отображение $f : (\mathcal{H}^n, \theta) \to (X, x_0)$. Так как X локально $n-$связно в x_0, то существует окрестность V_{x_0} такая, что вложение $V_{x_0} \subset X$ гомотопически $n-$тривиально. Так как f непрерывно, то существует натуральное число K такое, что $S_k^n \subset f^{-1}(V_{x_0})$ для $k > K$. Поэтому все отображения $f|_{S_k^n}$ являются гомотопически $n-$тривиальными при $k > K$. Определим отображение $\varphi : \mathcal{H}_n(X, x_0) \to \Pi_{i=1}^{\infty} G_i$ следующим образом:

$$\varphi([f]) = ([f|_{S_1^n}], [f|_{S_2^n}], [f|_{S_3^n}], \dots, [f|_{S_K^n}], e, e, \dots) \in \Pi_{i=1}^{\infty} G_i.$$

Очевидно, что φ сюрьективное отображение. Докажем, что φ инъективно. Для этого рассмотрим два отображения f и g такие, что $\varphi(f) = \varphi(g)$. Так как пространство X локально $n-$связно и имеет счетную базу в x_0 существует счетная вложенная система U_i окрестностей точки x_0 такая, что все вложения $U_{i+1} \subset U_i$ гомотопически n-тривиальны. Поэтому существует возрастающая система натуральных чисел $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ для которой $\mathrm{Im}(f|_{S_k^n}) \cup \mathrm{Im}(g|_{S_k^n}) \subset U_{m+1}$

Работа выполнена при поддержке Министерства Образования, Науки и Спорта Республики Словения по программе No. P1-0292.

при всех $k > K_m$. Для $k \leq K_1$ выберем любую гомотопию относительно точки θ которая связывает отображение $f|_{S^n_k}$ с $g|_{S^n_k}$ (это можно сделать так как $\varphi(f) = \varphi(g)$). Для k таких, что $K_1 < k \leq K_2$ выберем в множестве U_1 любую гомотопию между $f|_{S^n_k}$ и $g|_{S^n_k}$. Вообще, для k заключенных между K_m и K_{m+1}, выберем любую гомотопию, связывающую $f|_{S^n_k}$ с $g|_{S^n_k}$ в множестве U_m ($\mathrm{Im}(f|_{S^n_k})$ и $\mathrm{Im}(g|_{S^n_k})$ лежат в U_{m+1} и вложение $U_{m+1} \subset U_m$ гомотопически $n-$тривиально). В результате мы получим гомотопию относительно точки θ между f и g, т.е. φ инъективно. $\square$

Теорема 2. *Если пространство X имеет счетную систему окрестностей в точке x_0 и группы $\mathcal{H}_n(X, x_0)$ (множества $\mathcal{H}_0(X, x_0)$) счетны, тогда X локально $n-$связно в точке x_0.*

Доказательство. Предположим, что X не локально $n-$связно в точке x_0. Тогда существует вложенная система элементов базы V_i точки x_0 такая, что все вложения $V_i \subset V_1$ гомотопически существенны в размерности n. Выберем для каждого i отображение $f_i : S^n \to V_i$ композиция которого с вложением $V_i \subset V_1$ гомотопически существенна. Далее, каждой последовательности нулей и единиц $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots)$, $\sigma_i = 0$ или 1, очевидно соответствует отображение $f_\sigma : (\mathcal{H}^n, \theta) \to (X, x_0)$. Рассмотрим две такие последовательности σ и σ', что $\sigma_i \neq \sigma'_i$ для бесконечного множества индексов. Отображение f_σ не гомотопно $f_{\sigma'}$. Действительно, предположим, что они гомотопически эквивалентны, тогда существует гомотопия $H : (\mathcal{H}^n, \theta) \times I \to (X, x_0)$ соединяющая f_σ и $f_{\sigma'}$. Так как $H(\theta \times I) = x_0 \in V_1$, то существует число K такое, что $H(S^n_k \times I) \subset V_1$ при $k > K$. Так как почти для всех i $\sigma_i \neq \sigma'_i$, то существует $k_0 > K$ для которого $\sigma_{k_0} \neq \sigma'_{k_0}$. Тогда одно из отображений $f_\sigma|_{S^n_{k_0}} : S^n_{k_0} \to V_{k_0} \to V_1$ или $f_{\sigma'}|_{S^n_{k_0}} : S^n_{k_0} \to V_{k_0} \to V_1$ гомотопически существенно, а другое гомотопически постоянно. Это противоречит тому, что $H(S^n_{k_0} \times I) \subset V_1$. Поэтому f_σ и $f_{\sigma'}$ гомотопически неэквивалентны.

Так как множество всех σ которые отличаются друг от друга на бесконечном множестве индексов несчетно, то $\mathcal{H}_n(X, x_0)$ несчетно. Это противоречит предположениям Теоремы 2. $\square$

Следствие 3. *Компактное метрическое пространство X есть континуум Пеано в том и только в том случае, когда множество $\mathcal{H}_0(X, x_0)$ тривиально в каждой точке x_0 пространства X.*

Доказательство. Связное компактное метрическое пространство есть континуум Пеано в том и только в том случае, когда оно линейно связно и $0-$связно [2; стр.259]. Пространство X линейно связно в том и только в том случае, когда множество $\pi_0(X, x_0)$ тривиально. Поэтому, и согласно Теореме 1, если X есть континуум Пеано, то множество $\mathcal{H}_0(X, x_0)$ тривиально.

По Теореме 2 компактное метрическое пространство $0-$связно в том и только в случае, когда множество $\mathcal{H}_0(X, x_0)$ счетно. Так как множество $\mathcal{H}_0(X, x_0)$ тривиально, пространство X линейно связно, $0-$связно и локально связно. $\square$

Следствие 4. *Конечно-мерное компактное метрическое пространство X есть ANR-пространство в том и только в том случае, когда группы $\mathcal{H}_n(X, x_0)$ счетны для всех n и всех точек $x_0 \in X$.*

Доказательство. Всякое ANR-пространство локально стягиваемо и, поэтому, локально $n-$связно при всех n. По Теореме 1, $\mathcal{H}_n(X, x_0) = \Pi_{i=1}^{\infty}\pi_n(X, x_0)$. Гомотопические группы $\pi_n(X, x_0)$ компактных ANR-пространств счетны (это следует из теоремы Веста о гомотопической эквивалентности компактных ANR-пространств компактным полиэдрам [4] и по теореме о симплициальной аппроксимации нерперывных отображений полиэдров). Поэтому $\mathcal{H}_n(X, x_0)$ счетны для всех n и всех точек x_0.

Обратно, предположим, что группы $\mathcal{H}_n(X, x_0)$ счетны для всех n и всех x_0. По Теореме 2 пространство X локально $n-$связно для всех n, т.е. является LC^∞ пространством. Всякий конечно-мерный LC^∞ континуум является $ANR-$пространством [1; стр. 139], поэтому X есть ANR-пространство. $\square$

Следствие 5. *Конечно-мерное компактное метрическое пространство X есть AR-пространство тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}_n(X, x_0) = e$ при всех n и во всех точках x_0 пространства X.*

Замечание 1. Конус над 1-мерной Гавайской серьгой $C(\mathcal{H}^1, \theta)$ не локально 1-связен, поэтому $\mathcal{H}_1(X, *) \neq e$ для некоторой точки $*$. В тоже время все его гомотопические группы тривиальны.

Замечание 2. (К. Эда) Существует локально 1-связный во всех точках компакт X такой, что группа $\mathcal{H}_1(X, *)$ несчетна во всех его точках. Например, это надстройка ΣC над компактом Кантора C.

Замечание 3. Существует локально 2-связный континуум Пеано X такой, что группы $\mathcal{H}_2(X, *)$ несчетны во всех точках $*$ (например, букет 2-мерной сферы и 1-мерной Гавайской).

Теорема 3. *Существует нестягиваемый клеточно-подобный компакт X такой, что для всех n и всех точек $x_0 \in X$ группа $\mathcal{H}_n(X, x_0)$ тривиальна.*

Доказательство. Рассмотрим счетный компактный букет сфер возрастающих размерностей $\bigvee_{i=1}^{\infty} S^i$ с отмеченной точкой θ. Пусть $C(\bigvee_{i=1}^{\infty} S^i)$ есть конус над букетом $\bigvee_{i=1}^{\infty} S^i$ с вершиной a и с основанием, которое мы отождествим с $\bigvee_{i=1}^{\infty} S^i$. Пусть $\theta \in \bigvee_{i=1}^{\infty} S^i \subset C(\bigvee_{i=1}^{\infty} S^i)$ будет отмеченной точкой конуса. Пусть X_1 и X_2 две копии конуса $C(\bigvee_{i=1}^{\infty} S^i)$ с вершинами a_1, a_2 и с отмеченными точками θ_1, θ_2 соответственно. Пусть X есть одноточечное объединение пространств X_1 и X_2 относительно точек θ_1 и θ_2. Пусть θ есть отмеченная точка X.

Очевидно, что X клеточно-подобный и, поэтому, ацикличный в когомологиях Чеха компакт. Так как сферы S^m являются C^n пространствами при $m > n$, то пространство X является LC^n пространством для всех n, т.е. X является LC^∞ пространством. Для LC^∞ компактов чеховские и сингулярные когомологии естественно изоморфны. Поэтому пространство X ациклично в сингулярных когомологиях и по теореме об универсальных коэффициентах пространство X ациклично в сингулярных гомологиях. Так как сферы S^n при $n > 1$ односвязны, пространство X односвязно. По теореме Гуревича об изоморфизме [3; стр.512], односвязные ацикличные в сингулярных гомологиях пространства асферичны $\pi_*(X) = e$ и X есть C^∞ пространство. По Теореме 1 при всех n $\mathcal{H}_n(X, x_0) = e$.

Докажем, что X нестягиваемо. Предположим, что пространство X стягиваемо и $H : X \times I \to X$ есть стягивание. Тогда для любой сферы $S^n \subset \bigvee_{i=1}^{\infty} S^i \subset X_1$ отображение $H : S^n \times I \to X$ является также стягиванием. Так как S^n нестягиваема, существует пара $(x_n^1, t_n^1) \in S^n \times I$ такая, что $H(x_n^1, t_n^1) = a_1$. Так как θ является предельной точкой $\{x_n^1\}_{n \in \mathbb{N}}$, то для некоторого t^1 выполнено $H(\theta, t^1) = a_1$. Можно считать, что t^1 минимальное такое число. Аналогично существует минимальное число t^2 такое, что $H(\theta, t^2) = a_2$. Без ограничения общности можно считать, что $t^1 < t^2$. Пусть U есть любая стягиваемая окрестность точки a_1, которая не содержит θ. Так как $H(\theta, t_1) \in U$, то существует окрестность V точки θ такая, что $H(V, t_1) \subset U$. Основание X_2 есть компактный букет сфер, поэтому существует число K такое, что $V \cap X_2$ содержит все сферы S^n при $n > K$. Так как U стягиваемое пространство и сферы S^n нестягиваемы, существуют пары точек $(x_n^2, t_n^2) \in S^n \times I$, $t_n^2 \leq t^1$, для которых $H(x_n^2, t_n^2) = a_2$. Поэтому $H(\theta, t^*) = a_2$ для некоторой точки $t^* \leq t^1$. Но это противоречит минимальности числа t^2 удовлетворяющего условию $H(\theta, t^2) = a_2$. $\square$

Вопрос. *Пусть P и P^* одноточечные компактификации счетных полиэдров точками θ и θ^*, соответственно. Пусть $f : (P, \theta) \to (P^*, \theta^*)$ такое непрерывное отображение, что $\mathcal{H}_n(f) : \mathcal{H}_n(P, \theta) \to \mathcal{H}_n(P^*, \theta^*)$ является изоморфизмом для всех n. Верно ли, что f гомотопическая эквивалентность?*

Список литературы

[1] К. Борсук, *Теория ретрактов*, М.: Мир, 1971.

[2] К. Куратовский, *Топология, 2*, М.: Мир, 1969.

[3] Э. Спеньер, *Алгебраическая топология*, М.: Мир, 1969.

[4] J. E. West, Ann. Math. **(2) 106** (1977), 1–18.

Институт Математики, Академия Наук Республики Таджикистан, Пр. Айну 299^A, Душанбе, Таджикистан 734063

E-mail address: umed-karimov@mail.ru

Институт Математики, Физики и Механики, Университет в Любляне, П.Я. 2964, Любляна, Словения 1001

E-mail address: dusan.repovs@uni-lj.si